ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

_____

MATHEMATIQUES

Option économique

Mardi 20 mai 2003, de 8h à 12h

_____

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

On note f la fonction définie, pour tout réel x strictement positif, par : $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$.

1) a. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, montrer que l'intégrale $I_n = \int_n^{+\infty} f(x)\,dx$ est convergente et exprimer I_n en fonction de n.

b. En déduire que $I_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

2) Montrer que la série de terme général $u_n = f(n)$ est convergente.

3) a. Établir que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq f(k)$.

b. En sommant soigneusement cette dernière inégalité, montrer que :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq I_n \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k + \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}.$$

4) Déduire des questions précédentes un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{k}}}{k^2}$.

Exercice 2

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul.

1) Soit f_n la fonction définie par : $f_n(x) = \begin{cases} n x^{n-1} & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Montrer que f_n est une densité de probabilité.

2) On considère une variable aléatoire X_n réelle dont une densité de probabilité est f_n.
On dit alors que X_n suit la loi monôme d'ordre n.
   a. Reconnaître la loi de X_1.
   b. Dans le cas où n est supérieur ou égal à 2, déterminer la fonction de répartition F_n de X_n, ainsi que son espérance $E(X_n)$ et sa variance $V(X_n)$.

3) On considère deux variables aléatoires U_n et V_n suivant la loi monôme d'ordre n ($n \geq 2$), indépendantes, c'est-à-dire qu'elles vérifient en particulier l'égalité suivante :
$\forall x \in \mathbb{R}$, $P(U_n \leq x \cap V_n \leq x) = P(U_n \leq x)\, P(V_n \leq x)$.
On pose $M_n = Sup(U_n, V_n)$.
   a. Pour tout réel x, écrire l'événement $(M_n \leq x)$ à l'aide des événements $(U_n \leq x)$ et $(V_n \leq x)$.
   b. En déduire une densité de M_n. Vérifier que M_n suit une loi monôme dont on donnera l'ordre, puis déterminer sans calcul $E(M_n)$.
   c. On pose $T_n = Inf(U_n, V_n)$. Exprimer $M_n + T_n$ en fonction de U_n et V_n, puis en déduire, sans calcul d'intégrale, la valeur de $E(T_n)$.

Exercice 3

1) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{e^x - 1}{x} > 0$.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0. \end{cases}$

2) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer que f est de classe C^1 sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, puis préciser $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$.

4) a. Montrer que $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = \dfrac{1}{2}$.
   b. En déduire que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donner $f'(0)$.

5) a. Étudier les variations de la fonction g définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = x e^x - e^x + 1$.
   b. En déduire le signe de $g(x)$, puis dresser le tableau de variations de f (limites comprises).

On considère la suite (u_n) définie par la donnée de son premier terme $u_0 > 0$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

6) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

7) a. Vérifier que $f(x) - x = f(-x)$.

b. En déduire, pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, le signe de $f(x) - x$.

c. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

8) En déduire que (u_n) converge et donner sa limite.

9) Écrire un programme Pascal permettant de déterminer et d'afficher le plus petit entier naturel n pour lequel $u_n \leq 10^{-3}$, dans le cas où $u_0 = 1$.

Problème

Un joueur participe à un jeu se jouant en plusieurs parties. Ses observations lui permettent d'affirmer que :

• s'il gagne deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{2}{3}$.

• s'il perd une partie et gagne la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{1}{2}$.

• s'il gagne une partie et perd la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{1}{2}$.

• s'il perd deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'événement : « le joueur gagne la $n^{\text{ème}}$ partie ».
De plus, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose :
$E_n = A_{n-1} \cap A_n$; $F_n = \overline{A_{n-1}} \cap A_n$; $G_n = A_{n-1} \cap \overline{A_n}$; $H_n = \overline{A_{n-1}} \cap \overline{A_n}$.

1) On admet que (E_n, F_n, G_n, H_n) est un système complet d'événements.

a. Montrer, en utilisant la formule des probabilités totales, que :
$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(E_{n+1}) = \frac{2}{3} P(E_n) + \frac{1}{2} P(F_n)$.

b. Exprimer de la même façon (aucune explication n'est exigée) les probabilités $P(F_{n+1})$, $P(G_{n+1})$ et $P(H_{n+1})$ en fonction de $P(E_n)$, $P(F_n)$, $P(G_n)$ et $P(H_n)$.

c. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $U_n = \begin{pmatrix} P(E_n) \\ P(F_n) \\ P(G_n) \\ P(H_n) \end{pmatrix}$.

Vérifier que $U_{n+1} = M U_n$, où $M = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 2/3 \end{pmatrix}$.

2) a. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer PQ . En déduire que P est inversible et donner son inverse.

b. On note C_1, C_2, C_3, C_4 les colonnes de P. Calculer MC_1, MC_2, MC_3 et MC_4, puis en déduire que $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{2}$ et 1 sont les valeurs propres de M.

c. Justifier que $M = PDP^{-1}$, où D est une matrice diagonale que l'on déterminera.

Dans toute la suite, on suppose que le joueur a gagné les deux premières parties.

3) a. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^n = PD^nP^{-1}$.

b. Montrer, également par récurrence, que : $\forall n \geq 2$, $U_n = M^{n-2}\,U_2$.

c. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, donner la première colonne de M^n, puis en déduire $P(E_n)$, $P(F_n)$, $P(G_n)$ et $P(H_n)$.

d. Montrer que l'on a :

$$\lim_{n\to+\infty} P(E_n) = \frac{3}{10} \;;\; \lim_{n\to+\infty} P(F_n) = \frac{2}{10} \;;\; \lim_{n\to+\infty} P(G_n) = \frac{2}{10} \;;\; \lim_{n\to+\infty} P(H_n) = \frac{3}{10}.$$

4) Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si le joueur gagne la $k^{\text{ème}}$ partie et qui vaut 0 sinon (X_1 et X_2 sont donc deux variables certaines).

a. Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, exprimer A_k. en fonction de E_k et F_k.

b. En déduire, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, la loi de X_k.

5) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note S_n la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur lors des n premières parties.

a. Calculer $P(S_n = 2)$ en distinguant les cas $n = 2$, $n = 3$ et $n \geq 4$.

b. Déterminer $P(S_n = n)$.

c. Pour tout entier n supérieur ou égal à 3, écrire S_n en fonction des variables X_k, puis déterminer $E(S_n)$ en fonction de n.